



KARAKTERISTIK PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MONGONSTRUKSI BUKTI KETERBAGIAN

Patma Sopamena*

*Jurusan Pendidikan Matematika IAIN Ambon

HP. 085243088129, email: patma.sopamena@iainambon.ac.id

Abstract

Assimilation outline and accommodation from Piaget is used to evaluate student's thinks process. According to Piaget, assimilation is integration process of new stimulation through the change of old scheme or the construction or new scheme to adapt with accepted stimulation. The sampling is done by Think-Out-Loud (TOL). From results of this research is found that the process thought the student IAIN Ambon in constructing proof evidence had two characteristics, that is: (a) almost complete, that is when the student construct but proof is not in accordance with the sub-structure of the problem (the process of algebra) in the process of the assimilation and accommodation, (b) incomplete because incomplete the process of the assimilation that is the process of thinks simplest and incomplete the process of accommodation.

Key word: *Thinking Process, Construction, Proof*

Sitasi: Sopamena, P. 2017. Karakteristik Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengonstruksi Bukti Keterbagian. *Matematika dan Pembelajaran*, 5(2), 169-192.

A. PENDAHULUAN

Kajian tentang perkembangan kognitif seringkali mengacu pada teori perkembangan intelektual dari Piaget. Dalam penelitiannya Piaget mempelajari tahapan perkembangan berpikir pada anak, dan mengkaji bagaimana seorang anak mengonstruksi pengetahuan. Ia yakin bahwa dengan cara ini akan dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan Epistemologi, seperti “bagaimana kita memperoleh pengetahuan” dan “bagaimana kita tahu apa yang kita ketahui”.

Vincent Ruggiero (1988) mengartikan berpikir sebagai “segala aktivitas mental yang membantu merumuskan atau memecahkan masalah, membuat keputusan, atau memenuhi keinginan untuk memahami. Berpikir juga diartikan sebagai suatu pencarian jawaban dan suatu pencapaian makna”.

Berkaitan dengan bukti, kebanyakan pakar menganggap bukti sebagai unsur pokok pada mata pelajaran matematika dan praktek matematikawan. Menurut fakta, Ross (1998) berpendapat bahwa “esensi matematika terletak pada buktinya”. Bukti

diharapkan bisa memainkan peran yang lebih dominan di kurikulum matematika sekolah dan menjadi bagian dari pendidikan matematika di semua jenjang pendidikan. Namun demikian, hal tersebut membuat tuntutan-tuntutan signifikan pada guru-guru matematika sebab beberapa pendekatan yang didesain untuk mempertinggi peran bukti di ruang kelas memerlukan usaha serius.

Banyak tulisan menunjukkan berbagai macam peran “bukti” dalam matematika, diantaranya; (1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan adalah benar, (2) menjelaskan mengapa pernyataan itu benar, (3) mengomunikasikan pengetahuan matematika, dan (4) menemukan atau menciptakan matematika baru atau mensistematisasikan pernyataan-pernyataan ke dalam sistem aksiomatika (Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna, 1983, 1990) dalam Lulu Healey & Celia Hoyles¹.

Peran bukti dalam memverifikasikan suatu pernyataan adalah benar memerlukan sedikit elaborasi. Tentu saja sebagian ilmuwan akan mempertanyakan bahwa peran utama bukti dalam matematika adalah untuk menunjukkan kebenaran suatu hasil atau kebenaran suatu pernyataan. Menurut Hersh (1993), matematikawan tertarik dengan pertanyaan “yang lebih daripada apakah dugaan itu adalah benar, matematikawan ingin mengetahui *mengapa* ini adalah benar”. Selain itu, bukti yang berfungsi untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan adalah benar, kerap kali dipertahankan pada level dugaan tingkat tinggi. Status bukti dipertinggi jika ini bisa memberikan pengetahuan tentang mengapa proposisi itu adalah benar (Bell, 1976) dalam Lulu Healey & Celia Hoyles 2000.

Di dalam komunitas matematika, kebanyakan memandang bukti sebagai “suatu bentuk wacana (Wheeler, 1990), yakni sebagai alat untuk mengomunikasikan matematika kepada matematikawan lainnya (Alibert & Thomas, 1991; Balacheff, 1991) dalam Lulu Healey & Celia Hoyles 2000. Bukti juga memainkan peran penting dalam menemukan atau menciptakan matematika baru. Sebagaimana yang ditunjukkan oleh Villiers (1999) “terdapat banyak contoh dalam sejarah matematika di mana hasil-hasil baru ditemukan atau diciptakan

¹ Lulu Healey & Celia Hoyles, 2000. *A Study of Proof Conceptions in Algebra*, Universitas London, UK. JRME, 3(4) 2000)

secara deduktif (misalnya, geometri non-Euclidean)". Selain itu, peran bukti ini bermanifestasi dalam hubungan bukti terhadap pemecahan masalah dan perkiraan (Polya, 1957).

Penalaran dan bukti dalam matematika merupakan dua aspek penting yang harus mendapat penekanan pada siswa SMA/MA atau mahasiswa tahun pertama. Hal ini sejalan dengan prinsip dan standar matematika sekolah yang direkomendasikan oleh NCTM (*National Council of Teacher of Mathematics*) di Amerika Serikat. NCTM (2000) memberikan prinsip dan standar untuk siswa SMA/MA, bahwa penalaran dan bukti harus menjadi aspek yang mendasar. Siswa dituntut untuk dapat membangun dan menilai suatu penalaran dan bukti dalam matematika. Di dalam bukti kadang-kadang juga memberikan inspirasi untuk pemecahan masalah yang berkaitan dengan generalisasi (*generalization*) dari teorema yang dibuktikan.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Eric J. Knuth² yakni konsepsi guru matematika sekolah menengah tentang bukti, bahwa kebanyakan guru memiliki pandangan terbatas terhadap sifat bukti dalam matematika dan menunjukkan pemahaman yang tidak cukup tentang konstruksi bukti. Penelitian lain yang dilakukan oleh Lulu Healey & Celia Hoyles³ berkaitan konsepsi siswa tentang bukti pada aljabar, bahwa siswa mempunyai konsepsi yang berbeda tentang bukti, antara lain; ada siswa yang membuktikan secara narasi, ada yang membuktikan secara induktif, dan ada pula yang membuktikan secara deduktif.

Dari penelitian-penelitian tersebut di atas, hanya mendeskripsikan tentang bagaimana konsepsi guru maupun siswa tentang bukti tanpa melihat proses berpikir siswa dan guru dalam mengkonstruksi bukti. Karena itu penelitian ini akan menindaklanjuti dengan mengkaji bagaimana proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti dengan menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi. Proses berpikir pada pembuktian matematika ini dikaji berdasarkan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi dari Piaget. Dalam hal ini, ketika seseorang

² Eric. J. Knuth, 2002. Secondary School Mathematics Teacher's Conceptions of Proof, *JRME*, 5(33), University of Wisconsin-Madison.

³ Lulu Healey & Celia Hoyles, *op. cit.*

berinteraksi dengan lingkungan, akan terjadi proses adaptasi. Pada saat beradaptasi, seseorang mengalami dua proses kognitif, yaitu asimilasi dan akomodasi.

Menurut Piaget (Brooks and Brooks, 1993), *assimilation is the incorporation of new events into intelligence as a scheme or concept*. Dalam proses asimilasi, stimulus diinterpretasikan berdasarkan skema yang sudah dimiliki oleh seseorang. Dalam hal ini, asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus ke dalam skema yang sudah dimiliki oleh seseorang.

Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima. Piaget (Brooks and Brooks, 1993) menegaskan bahwa *In accommodation, existing schemes are modified to account for new information*. Dalam memecahkan masalah, proses adaptasi (asimilasi dan akomodasi) terus berlangsung sampai terjadi keseimbangan (*equilibrium*).

Pada proses asimilasi, struktur masalah sudah sesuai dengan struktur berpikir (skema) yang dimiliki oleh siswa, sehingga stimulus tersebut dapat diinterpretasi secara langsung oleh siswa. Dalam hal ini terjadi pengintegrasian stimulus ke dalam skema yang sudah dimiliki. Ketika struktur masalah belum sesuai dengan skema yang dimiliki, maka akan terjadi proses modifikasi skema lama atau pembentukan skema baru sehingga struktur masalah dapat diintegrasikan ke skemanya. Dalam proses pemecahan masalah, proses asimilasi dan akomodasi bisa terjadi secara bersama-sama.

Proses asimilasi dan akomodasi berlangsung sampai terjadi kondisi *equilibrium*. Ketika seseorang telah memperoleh penyelesaian, namun belum puas dengan penyelesaian itu (karena masih dirasakan ada kekurangan), maka pada diri orang tersebut masih terjadi *disequilibrium*. Kondisi ini akan mendorong seseorang untuk mengadakan refleksi (pegecekan kembali) terhadap jawaban yang sudah diperolehnya. Sebaliknya, ketika seseorang telah puas dengan jawabannya, maka proses berpikir orang tersebut sudah mencapai kondisi *equilibrium*.

B. METODE PENELITIAN

1. Jenis dan Pendekatan Penelitian

Penelitian ini akan mengungkap proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian keterbagian. Proses berpikir dikaji menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi. Asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus ke dalam skema yang dimiliki oleh seseorang. Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui perubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima. Karena data yang dikumpulkan adalah data verbal, maka penelitian ini tergolong penelitian kualitatif-eksploratif⁴.

2. Subjek Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada mahasiswa matematika IAIN Ambon Semester IV yang memprogram mata kuliah teori bilangan. Subjek penelitian sebanyak 6 orang, yang diambil berdasarkan tingkat kepandaianya diantaranya; 2 orang pada tingkat tinggi, 2 orang pada tingkat sedang, dan 2 orang dari tingkat kurang yang dibuktikan dengan daftar nilai matakuliah Geometri euclide, serta berdasarkan kelancaran berkomunikasi (informasi dari dosen matakuliah tersebut). Pemilihan subjek yang terbatas hanya 6 orang dikarenakan keterbatasan peneliti, dan juga agar pengamatan menjadi lebih rinci dan mendalam.

Dalam penelitian ini, seorang mahasiswa akan menyelesaikan masalah bukti (instrument lembar kerja) dan mengungkapkan secara keras apa yang sedang ia pikirkan (*Think Out Louds*). Setelah mahasiswa tersebut memperoleh penyelesaian, peneliti memeriksa kebenaran jawaban mahasiswa.

3. Prosedur Pengumpulan Data

Penelitian ini mengkaji proses berpikir mahasiswa dalam memecahkan masalah bukti dengan kerangka asimilasi dan akomodasi. Pengumpulan data dilakukan dengan memberikan masalah kepada seorang mahasiswa untuk diselesaikan. Dalam proses penyelesaian, mahasiswa mengungkapkan secara keras

⁴ Subanji, 2007. *Proses Berpikir Penalaran Kovariasional Pseudo dalam Mengkonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamika Berkebalikan*. Disertasi tidak dipublikasikan, Unesa Surabaya

apa yang sedang ia pikirkan. Peneliti merekam ungkapan verbal mahasiswa dan mencatat perilaku (ekspresi) mahasiswa, termasuk hal-hal yang dilakukan oleh mahasiswa, ketika menyelesaikan masalah tersebut. Pengumpulan data semacam ini, tergolong dalam metode *Think Out Loud* (Olson, Duffy, dan Mck, 1988)⁵. Untuk masalah yang sama, peneliti lain (Ericson and Simon, 1996; Calder & Sarah, 2002) menggunakan istilah *Think Alouds*. Metode ini dilakukan dengan meminta subjek penelitian untuk menyelesaikan masalah sekaligus menceritakan proses berpikirnya.

Metode *Think Aloud* merupakan salah satu cara khusus untuk mengungkap proses berpikir seseorang⁶. Namun demikian metode ini memiliki beberapa keterbatasan, sebagai berikut: (1) kesulitan mengungkap proses berpikir siswa yang mengalami kesulitan mengutarakan pikirannya secara verbal. (2) keterbatasan pada apa yang dapat diingat. (3) kemampuan siswa untuk menjelaskan atau menjustifikasi dari perilakunya sendiri.

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini dikaji dan dideskripsikan secara kualitatif proses berpikir mahasiswa. Untuk itu dipaparkan tiga kelompok subjek penelitian yang memiliki karakteristik berbeda, yang selanjutnya disebut kelompok atas, kelompok sedang, dan kelompok bawah. Subjek yang dimasukkan dalam kelompok atas adalah subjek 1 (S1) dan subjek 2 (S2). Subjek yang dimasukkan dalam kelompok sedang adalah subjek 3 (S3) dan subjek 4 (S4). Subjek yang dimasukkan dalam kelompok bawah adalah subjek 5 (S5) dan subjek 6 (S6). Ketiga karakteristik subjek ini, selanjutnya digunakan untuk mengeksplorasi teori terjadinya proses berpikir mahasiswa. Selanjutnya akan dipaparkan struktur berpikir dan terjadinya proses konstruksi mahasiswa untuk masing-masing subjek di kelompok atas, subjek di kelompok sedang, dan subjek di kelompok bawah. Tulisan ini selanjutnya mengkaji proses konstruksi kelompok atas.

⁵ Ibid. Hlm. 62

⁶ Ibid.

1. Analisis Proses Konstruksi Mahasiswa Terhadap Bukti Keterbagian Subjek Kelompok Atas

Mahasiswa yang menjadi subjek kelompok atas adalah subjek 1 (S1) dan subjek 2 (S2). Dalam hal menyelesaikan masalah bukti, proses konstruksi S1 dan S2 cukup lengkap. S1 dan S2 mampu menginterpretasikan struktur masalah yang diberikan berdasarkan skema yang dimiliki dengan cepat. Sebenarnya S1 dan S2 mampu membentuk struktur berpikir (asimilasi dan akomodasi) sesuai dengan struktur masalah yang diberikan, namun jawaban yang dituliskan (kesimpulan bukti) tidak sesuai, terutama ketidak telitian S1 dan S2 ketika melakukan proses aljabar yang ditandai dengan “**simpul yang diblok**”, sehingga menghasilkan jawaban salah. Dalam hal ini, S1 dan S2 langsung melakukan refleksi ulang terhadap jawaban yang dituliskan, Ketika peneliti menanyakan kemantapan jawaban yang dihasilkan dan apa yang dipikirkan. Dalam hal ini dirasakan adanya ketidaksesuaian, sehingga S1 dan S2 membenahi jawabannya dalam waktu yang relatif cepat. Akhirnya S1 dan S2 dapat menyelesaikan masalah dengan menghasilkan jawaban benar.

Mahasiswa yang menjadi subjek kelompok atas adalah subjek 1 (S1) dan subjek 2 (S2). Dalam hal menyelesaikan masalah bukti, proses konstruksi S1 dan S2 cukup lengkap. S1 dan S2 mampu menginterpretasikan struktur masalah yang diberikan berdasarkan skema yang dimiliki dengan cepat. Sebenarnya S1 dan S2 mampu membentuk struktur berpikir (asimilasi dan akomodasi) sesuai dengan struktur masalah yang diberikan, namun jawaban yang dituliskan (kesimpulan bukti) tidak sesuai, terutama ketidak telitian S1 dan S2 ketika melakukan proses aljabar, sehingga menghasilkan jawaban salah. Dalam hal ini, S1 dan S2 langsung melakukan refleksi ulang terhadap jawaban yang dituliskan, Ketika peneliti menanyakan kemantapan jawaban yang dihasilkan dan apa yang dipikirkan. Dalam hal ini dirasakan adanya ketidaksesuaian, sehingga S1 dan S2 membenahi jawabannya dalam waktu yang relatif cepat. Akhirnya S1 dan S2 dapat menyelesaikan masalah dengan menghasilkan jawaban benar.

2. Proses Konstruksi Bukti Keterbagian dari Subjek S1

Dalam memecahkan masalah bukti ini, S1 mengaktifkan asimilasi dan akomodasi secara maksimal, sehingga struktur berpikir yang dihasilkan cukup

kompleks dan sesuai dengan struktur masalah yang dihadapi. Ketika menghadapi masalah ini, S1 membangun struktur berpikir secara bertahap dengan menginterpretasi masalah bagian perbagian secara tepat. Namun ketika mengkonstruksi bukti (sebagai hasil akhir dari proses berpikir mahasiswa), S1 melakukan kesalahan. Kesalahan terjadi dalam mengintepretasikan proses aljabar. Adapun struktur konstruksi S1 dalam memecahkan masalah bukti dapat digambarkan seperti Diagram1 berikut.

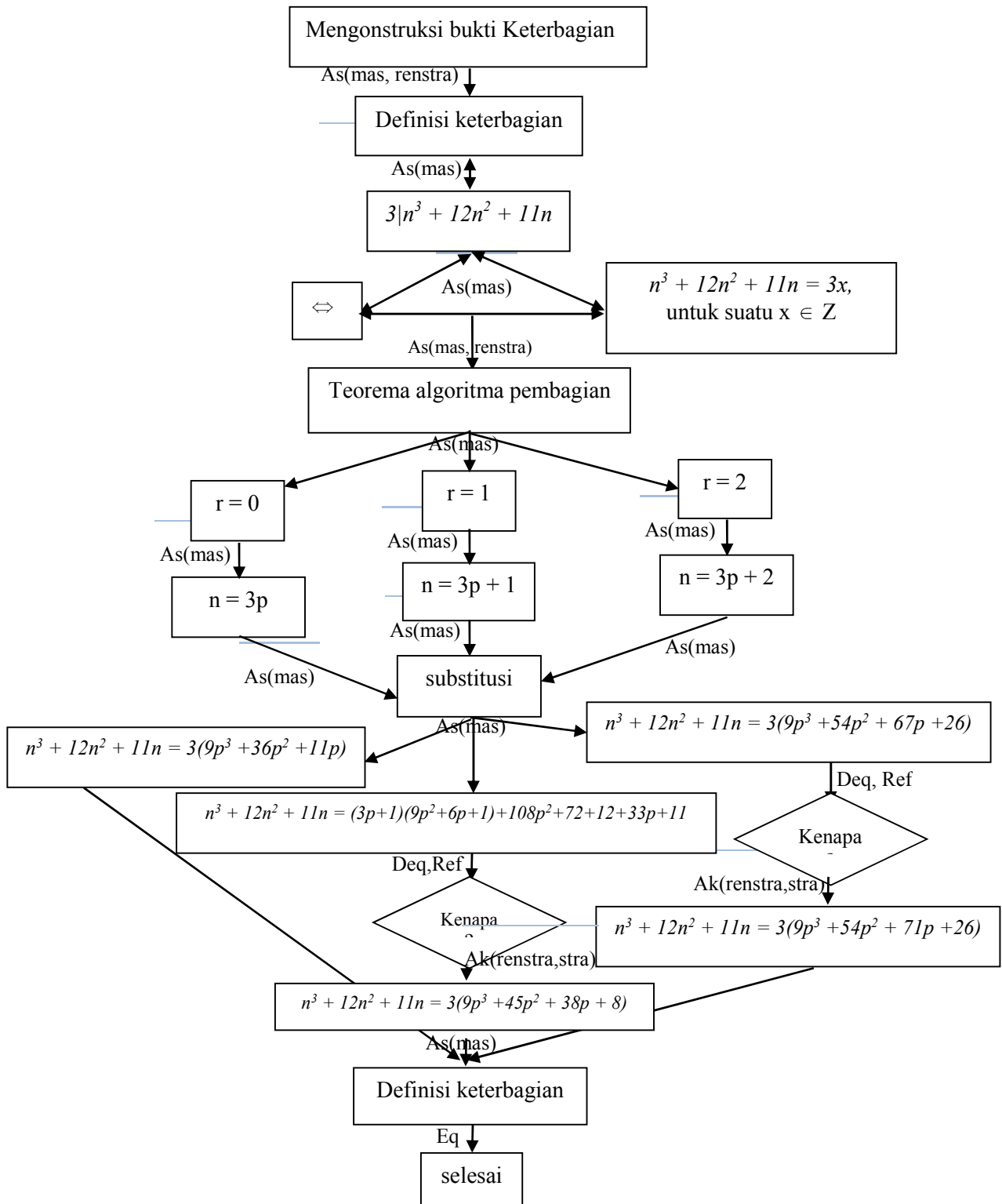


Diagram 1. Struktur Konstruksi Bukti S1

3. Asimilasi dan Akomodasi dalam Proses Berpikir S1

Untuk menganalisis terjadinya poses asimilasi dan akomodasi dapat dilakukan dengan mengkaji pembentukan struktur konstruksi (Diagram 4.1), ketika S1 menghadapi masalah dengan struktur seperti Diagram 2.5.1, dalam proses berpikir S1 terjadi disequilibrasi (*S1 terlihat diam dan memikirkan sesuatu*), sehingga berlanjut pada proses asimilasi dan akomodasi. Terjadinya proses asimilasi dan akomodasi dapat digambarkan pada Diagram 2 berikut.

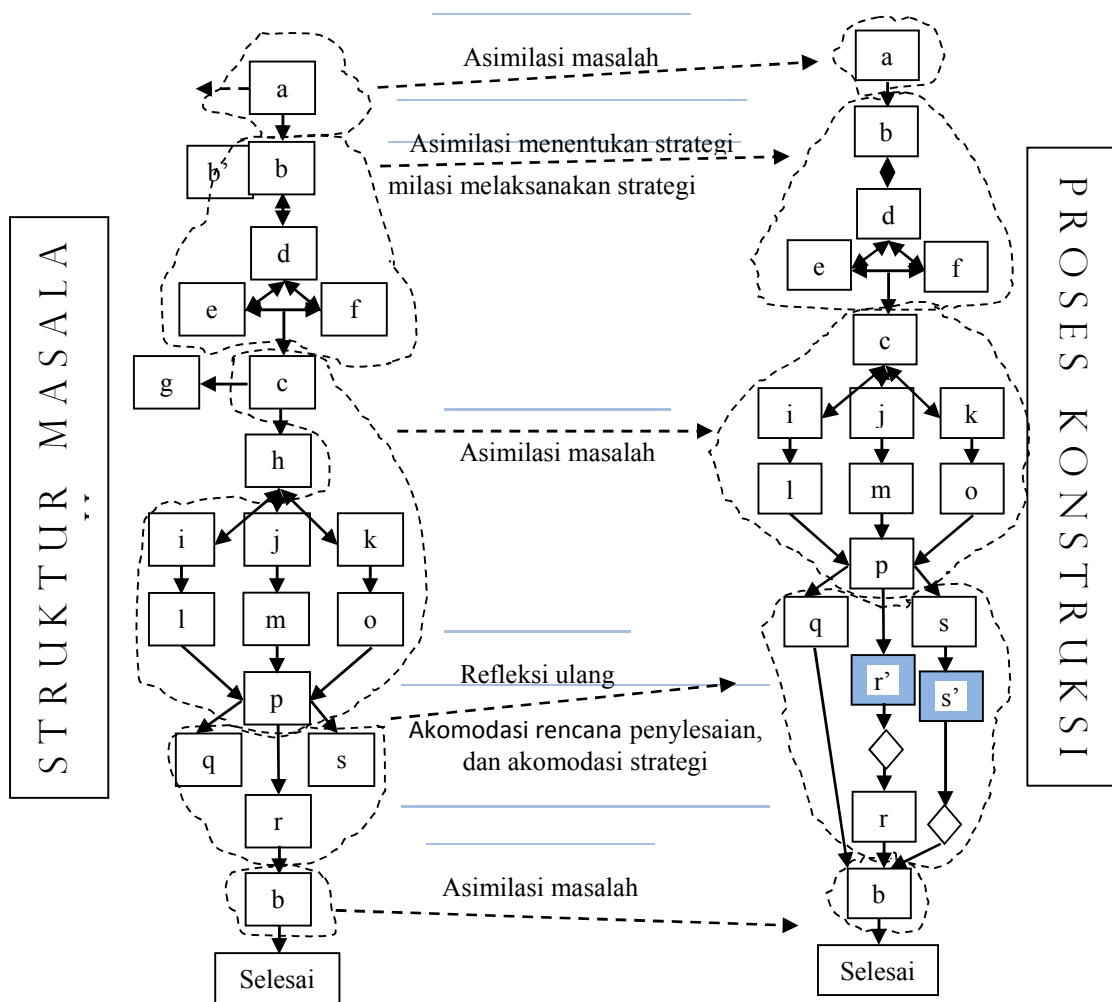


Diagram 2 Terjadinya Asimilasi dan Akomodasi dalam Proses Berpikir S1

Keterangan:

a = masalah yang diajukan: "mengkonstruksi bukti keterbagian"	j : r = 1
b : definisi keterbagian	k : r = 2
b' : induksi matematika	l : n = 3t

c : Teorema algoritma pembagian	m : $n = 3t + 1$
d : $3n^3 + 12n^2 + 11n$	o : $n = 3t + 2$
e : \leftrightarrow	p : substitusi
f : $n^3 + 12n^2 + 11n = 3x$, untuk suatu $x \in Z$	t : $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9t^3 + 36t^2 + 11t)$
g : $0 \leq r < 3$	q : $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9t^3 + 45t^2 + 38t + 8)$
h : $n = 3t + r$	s : $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9t^3 + 54t^2 + 71t + 26)$
i : $r = 0$	

Ketika menghadapi masalah bukti yang strukturnya seperti Diagram 2.5.1, S1 sudah berhasil membentuk substruktur berpikir yang cukup lengkap. Dalam hal ini S1 telah melakukan proses asimilasi, akomodasi, dan analitik secara baik. S1 bisa memahami masalah secara langsung, definisi keterbagian, dan teorema algoritma pembagian. Struktur masalah yang sudah dikenal antara lain: masalah yang diajukan, yakni mengkonstruksi bukti keterbagian (a), definisi keterbagian (b), isi definisi keterbagian (d,e,f), teorema algoritma pembagian (c), isi teorema algoritma pembagian serta sebagian syaratnya (i, j, k), melakukan manipulasi aljabar (l,m,o,p). Dalam hal ini S1 membentuk struktur konstruksi yang cukup lengkap, namun substruktur yang terbentuk tidak sepenuhnya diimplementasikan pada jawaban. Hal ini terjadi terutama ketika S1 melakukan proses hitungan aljabar. Dalam hal ini S1 tidak teliti dengan apa yang ia kerjakan, proses berpikir S1 lebih didominasi oleh kebiasaan “yang penting sudah mendapatkan jawaban”. Awal terjadinya ketidaksesuaian penggunaan substruktur berpikir digambarkan pada Diagram 4.2, dengan “**simpul yang diblok**”, oleh karena itu proses berpikir S1 terjadi disequilibrasi tentang hitungan aljabar dan S1 langsung melakukan refleksi ulang terhadap jawaban tersebut sehingga proses berpikir berlanjut pada proses akomodasi, seperti yang terlihat pada hasil kerja S1 berikut

The image shows handwritten mathematical work on a light-colored background. The work consists of several lines of algebraic expressions:

$$\begin{aligned}
 &= (3p+1)(3p+1)^2 + 12(9p^2 + 6p + 1) + 33p + 11 \\
 &= (3p+1)(9p^2 + 6p + 1) + 108p^2 + 72 + 12 + 33p + 11 \\
 &= (27p^3 + 9p^2 + 18p^2 + 6p + 108p^2 + 72 + 12 + 33p + 11) \\
 &= 27p^3 + 27p^2 + 1 + 108p^2 + 165p + 23 \\
 &= 27p^3 + 135p^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Gambar 1a hasil kerja S1

dan diubah menjadi,

$$\begin{aligned} &\rightarrow (3p+1)^3 + 12(3p+1)^2 + 11(3p+1) \\ &= (3p+1)(3p+1)^2 + 12(9p^2 + 6p + 1) + 33p + 11 \\ &= (3p+1)(9p^2 + 6p + 1) + 108p^2 + 72p + 12 + 33p + 11 \\ &= (27p^3 + 9p^2 + 18p^2 + 6p + 3p + 1) + 108p^2 + 105p + 23 \\ &= 27p^3 + 135p^2 + 114p + 23 \end{aligned}$$

Gambar 1b hasil kerja S1

Dalam menyelesaikan masalah konstruksi bukti ini, proses berpikir S1 telah mampu memahami masalah dengan syarat-syarat dari masalah tersebut, sebagaimana pernyataan dari S1 berikut.

S1: membuktikan bahwa $3|n^3 + 12n^2 + 11n$ untuk semua anggota himpunan bilangan bulat.

Selanjutnya S1 merencanakan penyelesaian masalah (menentukan strategi) untuk menyelesaikan masalah bukti keterbagian ini, yakni S1 memilih definisi keterbagian dan dilanjutkan dengan algoritma pembagian, oleh karena itu S1 telah melakukan proses asimilasi memahami masalah (As(mas)) dan proses asimilasi merencanakan penyelesaian masalah (As(renstra)), dan asimilasi menyelesaikan masalah (As(stra)), sebagaimana pernyataan S1 sebagai berikut

S1: $3|n^3 + 12n^2 + 11n$, jika dan hanya jika $n^3 + 12n^2 + 11n = 3x$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$, selanjutnya misalkan $r = 0$ maka $n = 3p$, $r = 1$ maka $n = 3p + 1$, dan $r = 2$ maka $n = 3p + 2$.

Selanjutnya telah mampu memahami masalah dengan mensubstitusikan (mengganti) nilai $n = 3p$, $n = 3p + 1$, dan $n = 3p + 2$ ke persamaan, karena itu S1 telah melakukan proses asimilasi memahami masalah (As(mas)), sebagaimana pernyataan S1 berikut ini

S1: untuk $r = 0$, $n = 3p$ maka $n^3 + 12n^2 + 11n = (3p)^3 + 12(3p)^2 + 11(3p)$, dan seterusnya untuk $r = 1$ dan $r = 2$.

S1 melakukan lompatan bukti pada saat proses konstruksi, yaitu pada saat S1 menterjemahkan syarat dari teorema algoritma pembagian (S1 mengabaikan kombinasi linear ($q = 3t + r$), dan syarat $0 \leq r < 3$), namun S1 langsung menterjemahkan $0 \leq r < 3$ dengan mengambil $r = 0$, $r = 1$, dan $r = 2$, karena itu

S1 telah melakukan asimilasi masalah (As(mas)), yang dilanjutkan dengan asimilasi melaksanakan rencana penyelesaian (As(stra)).

Ketika S1 melakukan proses hitungan aljabar, terjadi disquilibrium namun S1 langsung melakukan refleksi ulang yang dilanjutkan dengan melakukan akomodasi rencana penyelesaian (Ak(renstra)), dan akomodasi menyelesaikan masalah (Ak(stra)). Selanjutnya S1 melakukan **proses penyelesaian aljabar dengan cepat** seperti digambarkan pada hasil kerja S1 berikut

$$\begin{aligned}
 n = 3p + 2 &\Leftrightarrow (3p + 2)^3 + 18(3p + 2) \\
 &= (3p + 2)(3p + 2)^2 + 18(3p + 2) \\
 &= (3p + 2)(9p^2 + 12p + 4) + 108p + 72 \\
 &= (27p^3 + 18p^2 + 36p^2 + 12p + 12p + 8) + 108p + 72 \\
 &= 27p^3 + 54p^2 + 108p^2 + 24p + 177p + 70 \\
 &= 27p^3 + 162p^2 + 201p + 78
 \end{aligned}$$

Gambar 1c hasil kerja S1

diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow n = 3p + 2 \\
 &(3p + 2)^3 + 12(3p + 2)^2 + 11(3p + 2) \\
 &(3p + 2)(3p + 2)^2 + 12(9p^2 + 12p + 4) + (33p + 22) \\
 &(3p + 2)(9p^2 + 12p + 4) + 108p^2 + 144p + 48 + 33p + 22 \\
 &(3p + 2)(9p^2 + 12p + 4) + 108p^2 + 144p + 33p + 22 + 48 \\
 &(3p + 2)(9p^2 + 12p + 4) + 108p^2 + 177p + 70 \\
 &(27p^3 + 36p^2 + 12p + 9p^2 + 24p + 8) + 108p^2 + 177p + 70 \\
 &27p^3 + 36p^2 + 9p^2 + 108p^2 + 12p + 177p + 70 + 8 \\
 &27p^3 + 153p^2 + 213p + 78 \\
 &3(9p^3 + 51p^2 + 71p + 16)
 \end{aligned}$$

Gambar 1d hasil kerja S1

Selanjutnya S1 tidak melakukan kesimpulan bagian perbagian dari hitungan aljabar ke definisi keterbagian, bahwa: $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9p^3 + 36p^2 + 11p)$ (t), $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9p^3 + 45p^2 + 38p + 8)$ (s), dan $n^3 + 12n^2 + 11n = 3(9p^3 + 54p^2 + 71p + 26)$ (q). Setelah S1 melakukan refleksi ulang, selanjutnya S1 telah mampu menyimpulkan bagian perbagian dan kesimpulan akhir dari masalah bukti ini (b). Hal ini menunjukkan bahwa S1 telah **mampu membentuk substruktur (struktur berpikir) yang sempurna sesuai dengan struktur masalah** melalui proses asimilasi, akomodasi, dan analitik.

4. Proses Konstruksi Bukti Keterbagian dari Subjek S2

Sebagaimana S1, S2 juga dalam menghadapi masalah bukti ini, sebagian struktur masalah sudah dikenal oleh S2. Dalam penelitian ini S2 melakukan refleksi langsung dalam proses penyelesaian bukti. S2 menggunakan struktur pengetahuan yang sudah dimiliki untuk menyelesaikan masalah, meskipun struktur berpikir yang dimiliki tersebut tidak lengkap. Struktur konstruksi S2 dalam menyelesaikan masalah bukti keterbagian ini dapat digambarkan seperti Diagram 3 berikut.

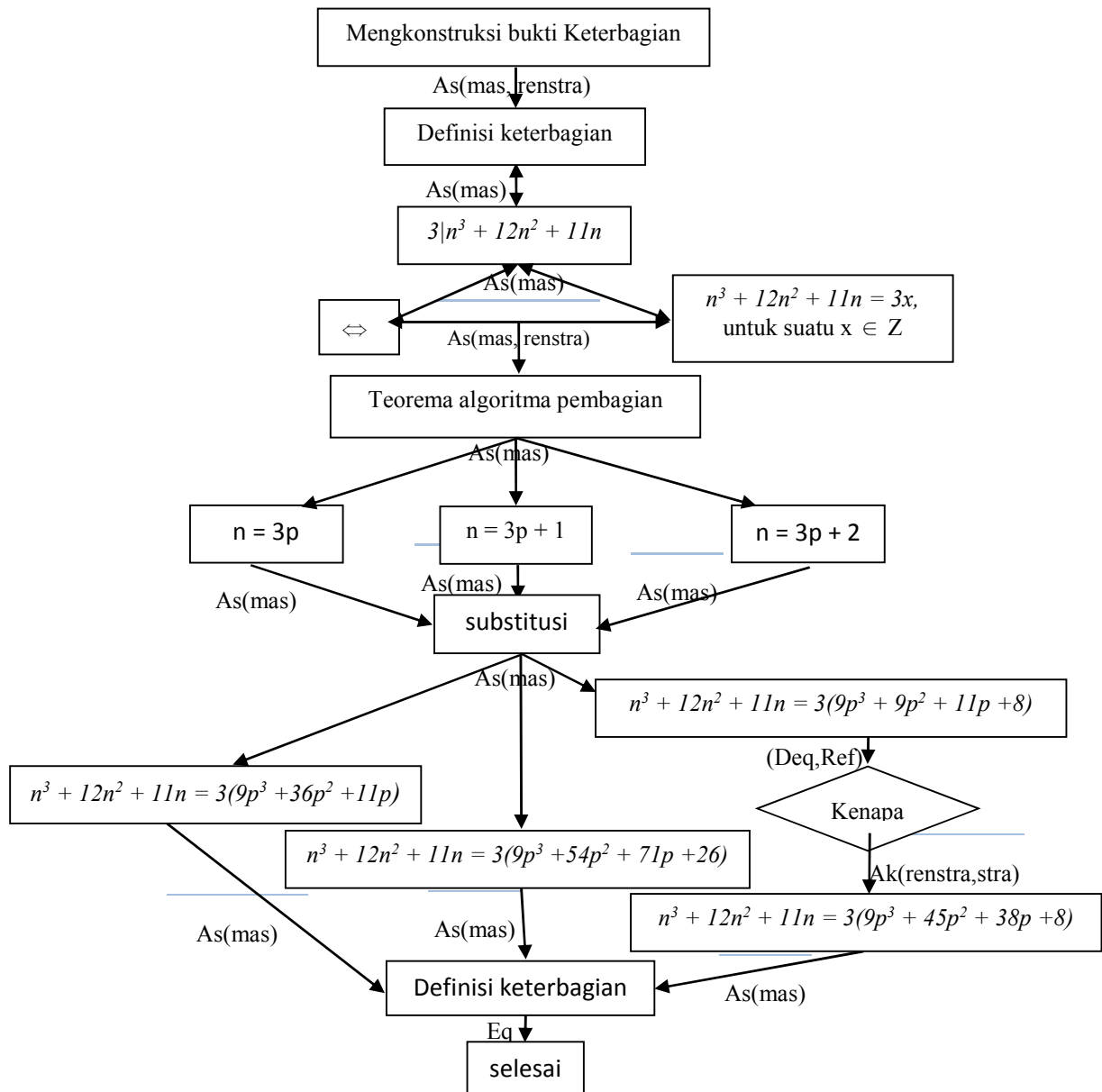


Diagram 3. Struktur Konstruksi Bukti S2

5. Asimilasi dan Akomodasi dalam Proses Konstruksi S2

Untuk menganalisis terjadinya poses asimilasi dan akomodasi dapat dilakukan dengan mengkaji pembentukan struktur konstruksi (Diagram 4.1), ketika S2 menghadapi masalah dengan struktur seperti Diagram 2.5.1. pada saat menghadapi masalah, dalam proses berpikir S2 terjadi disequilibrasi, yakni ketika S2 melakukan proses aljabar. Sehingga berlanjut pada proses asimilasi dan

akomodasi. Terjadinya proses asimilasi dan akomodasi dapat digambarkan pada Diagram 4 berikut.

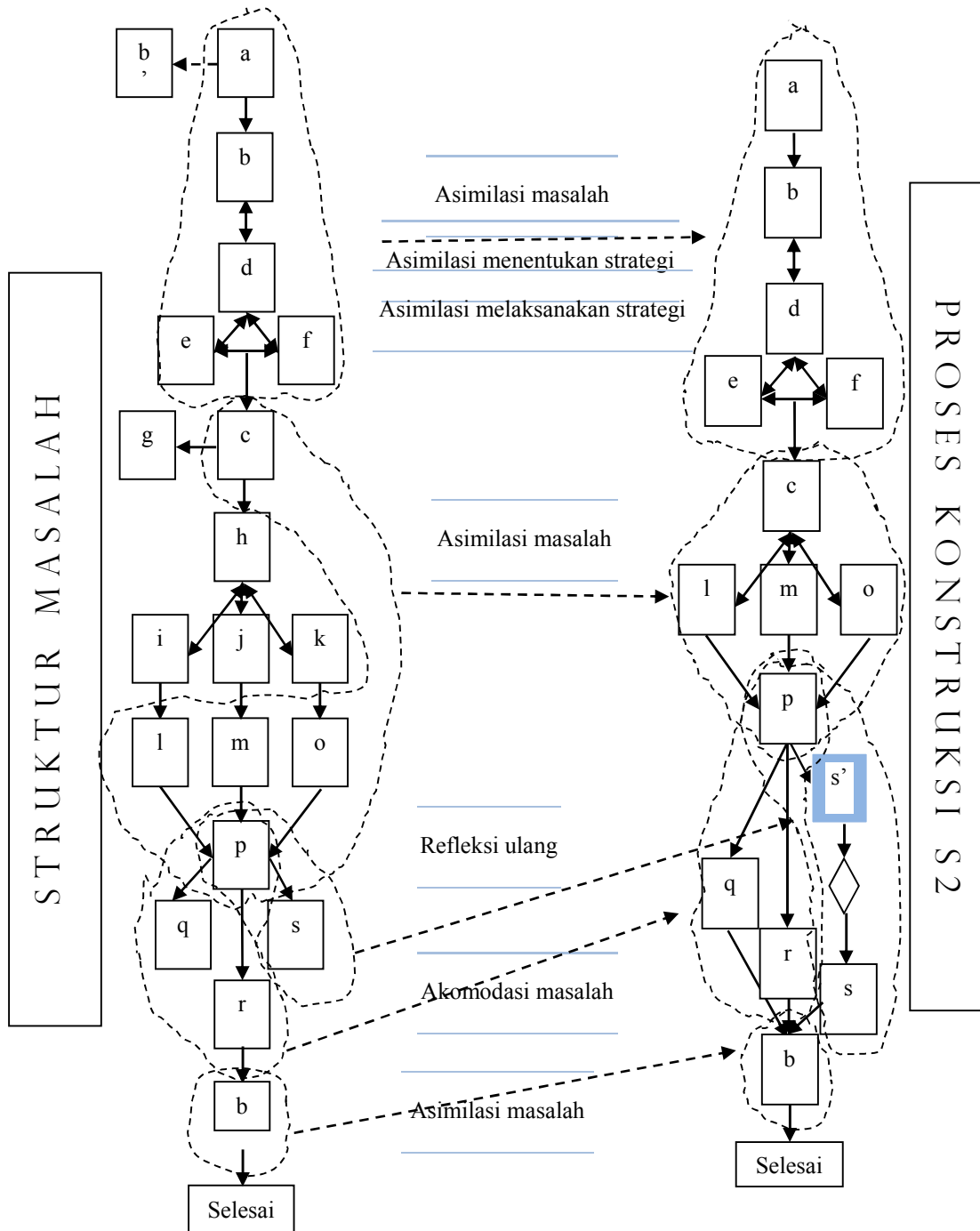


Diagram 4. Terjadinya Asimilasi dan Akomodasi dalam Proses Konstruksi S2

Ketika S2 menyelesaikan masalah, sebagian struktur masalah sudah dikenal S2. Struktur masalah yang sudah dikenal antara lain: masalah yang diajukan, yakni

mengkonstruksi bukti keterbagian (a), memilih definisi keterbagian (b), isi definisi keterbagian dengan syaratnya (d,e,f), teorema algoritma pembagian (c), isi teorema algoritma pembagian serta sebagian syaratnya (i, j, k), melakukan manipulasi aljabar (l,m,o,p).

Proses konstruksi yang dilakukan S2 adalah memahami masalah secara langsung, karena itu S2 telah melakukan proses asimilasi masalah (As(mas)), setelah memahami masalah selanjutnya S2 langsung menentukan strategi yang dipakai untuk menyelesaikan bukti keterbagian, dalam hal ini S2 menggunakan definisi keterbagian yang dilanjutkan dengan algoritma pembagian. Karena itu S2 telah melakukan proses asimilasi merencanakan penyelesaian (As(mas, renstra)), selanjutnya S2 menyelesaikan masalah bukti keterbagian dengan rencana penyelesaian (strategi yang telah ditentukan, karena itu S2 telah melakukan proses asimilasi melaksanakan rencana penyelesaian (As(stra)), seperti pernyataan S2 berikut.

S2: $3|n^3 + 12n^2 + 11n$ jika dan hanya jika $n^3 + 12n^2 + 11n = 3x$ untuk suatu x anggota bilangan bulat.

Selanjutnya

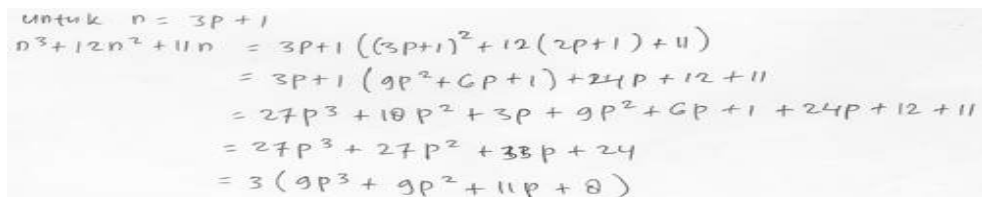
$$S2: n^3 + 12n^2 + 11n = n(n^2 + 12n + 11)$$

Ketika S2 melakukan proses algoritma pembagian, S2 mengabaikan salah satu syarat dari algoritma, yaitu $0 \leq r < 3$. S2 langsung memisalkan nilai $n = 3p$, dan $n = 3p + 1$, dan selanjutnya S2 tidak teliti dalam mengganti nilai-nilai n tersebut, seperti terlihat pada pernyataan dan hasil kerja berikut.

$$S2: \text{ untuk } n = 3p \text{ maka } n^3 + 12n^2 + 11n = 3p(3p^2 + 12 \cdot 3p + 11), \text{ dan untuk } n = 3p + 1 \text{ maka } n^3 + 12n^2 + 11n = 3p + 1((3p + 1)^2 + 12(2p + 1) + 11)$$

Walaupun kesimpulan kedua hasil substitusi mengarah kepada definisi keterbagian, tetapi S2 tidak teliti pada proses konstruksi (hasil substitusi) dan tidak melakukan refleksi ulang. Selanjutnya, ketika S2 mengganti nilai $n = 3p + 2$ pada proses aljabarnya tidak lengkap (salah), sehingga terjadi disequilibrasi (dengan

“**simpul diblok**”) namun S2 langsung melakukan refleksi ulang terhadap proses aljabarnya, yang dilanjutkan dengan melakukan akomodasi rencana penyelesaian (Ak(renstra)) dan akomodasi penyelesaian masalah (Ak(stra)) serta asimilasi masalah (As(mas)) dengan **penyelesaian aljabar dalam waktu yang singkat**. Seperti pada pernyataan dan hasil kerja S2 berikut.

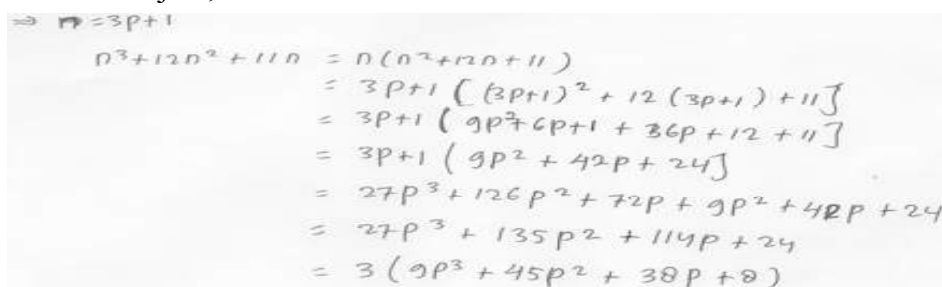


Handwritten mathematical work for $n = 3p + 1$. The work shows the expansion of the expression $n^3 + 12n^2 + 11n$ and its simplification to $3(9p^3 + 9p^2 + 11p + 8)$.

$$\begin{aligned} \text{untuk } n = 3p + 1 \\ n^3 + 12n^2 + 11n &= 3p + 1 ((3p + 1)^2 + 12(2p + 1) + 11) \\ &= 3p + 1 (9p^2 + 6p + 1) + 24p + 12 + 11 \\ &= 27p^3 + 18p^2 + 3p + 9p^2 + 6p + 1 + 24p + 12 + 11 \\ &= 27p^3 + 27p^2 + 33p + 24 \\ &= 3(9p^3 + 9p^2 + 11p + 8) \end{aligned}$$

Gambar 2a hasil kerja S2

dan diubah menjadi,

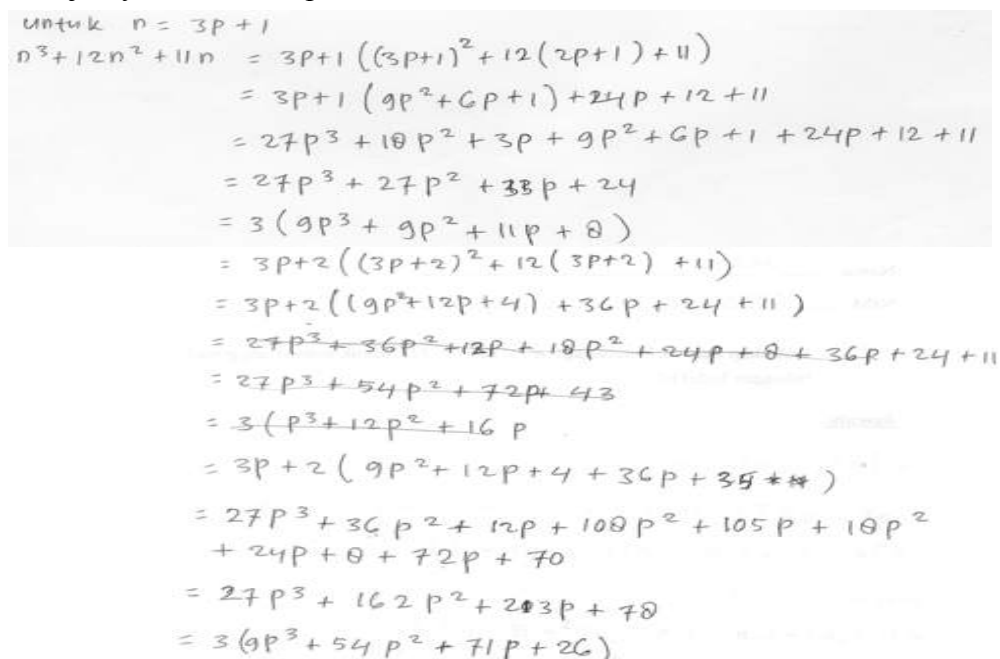


Handwritten mathematical work for $n = 3p + 1$. The work shows the expansion of the expression $n^3 + 12n^2 + 11n$ and its simplification to $3(9p^3 + 45p^2 + 38p + 8)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow n = 3p + 1 \\ n^3 + 12n^2 + 11n &= n(n^2 + 12n + 11) \\ &= 3p + 1 ((3p + 1)^2 + 12(3p + 1) + 11) \\ &= 3p + 1 (9p^2 + 6p + 1 + 36p + 12 + 11) \\ &= 3p + 1 (9p^2 + 42p + 24) \\ &= 27p^3 + 126p^2 + 72p + 9p^2 + 42p + 24 \\ &= 27p^3 + 135p^2 + 114p + 24 \\ &= 3(9p^3 + 45p^2 + 38p + 8) \end{aligned}$$

Gambar 2b hasil kerja S2

Selanjutnya untuk $n = 3p + 2$,



Handwritten mathematical work for $n = 3p + 2$. The work shows the expansion of the expression $n^3 + 12n^2 + 11n$ and its simplification to $3(9p^3 + 54p^2 + 71p + 26)$.

$$\begin{aligned} \text{untuk } n = 3p + 1 \\ n^3 + 12n^2 + 11n &= 3p + 1 ((3p + 1)^2 + 12(2p + 1) + 11) \\ &= 3p + 1 (9p^2 + 6p + 1) + 24p + 12 + 11 \\ &= 27p^3 + 18p^2 + 3p + 9p^2 + 6p + 1 + 24p + 12 + 11 \\ &= 27p^3 + 27p^2 + 33p + 24 \\ &= 3(9p^3 + 9p^2 + 11p + 8) \\ &= 3p + 2 ((3p + 2)^2 + 12(3p + 2) + 11) \\ &= 3p + 2 (9p^2 + 12p + 4) + 36p + 24 + 11 \\ &= 27p^3 + 36p^2 + 12p + 18p^2 + 24p + 8 + 36p + 24 + 11 \\ &= 27p^3 + 54p^2 + 72p + 43 \\ &= 3(p^3 + 12p^2 + 16p) \\ &= 3p + 2 (9p^2 + 12p + 4 + 36p + 35) \\ &= 27p^3 + 36p^2 + 12p + 108p^2 + 105p + 18p^2 \\ &\quad + 24p + 8 + 72p + 70 \\ &= 27p^3 + 162p^2 + 203p + 78 \\ &= 3(9p^3 + 54p^2 + 71p + 26) \end{aligned}$$

Gambar 2c hasil kerja S2

Akhirnya S2 memperoleh jawaban yang benar, dan menyimpulkan bahwa 3 membagi $n^3 + 12n^2 + 11n$ untuk semua anggota himpunan bilangan bulat. Hal ini menunjukkan bahwa S1 telah **mampu membentuk substruktur (struktur berpikir) yang lengkap sesuai dengan struktur masalah** melalui proses asimilasi, akomodasi, dan analitik.

6. Analisis Perbandingan antara Proses Konstruksi S1 dan S2

Untuk menganalisis perbandingan antara proses konstruksi S1 dan S2 dibandingkan dengan Diagram 2.5.1 dapat digambarkan pada Diagram 5 berikut:

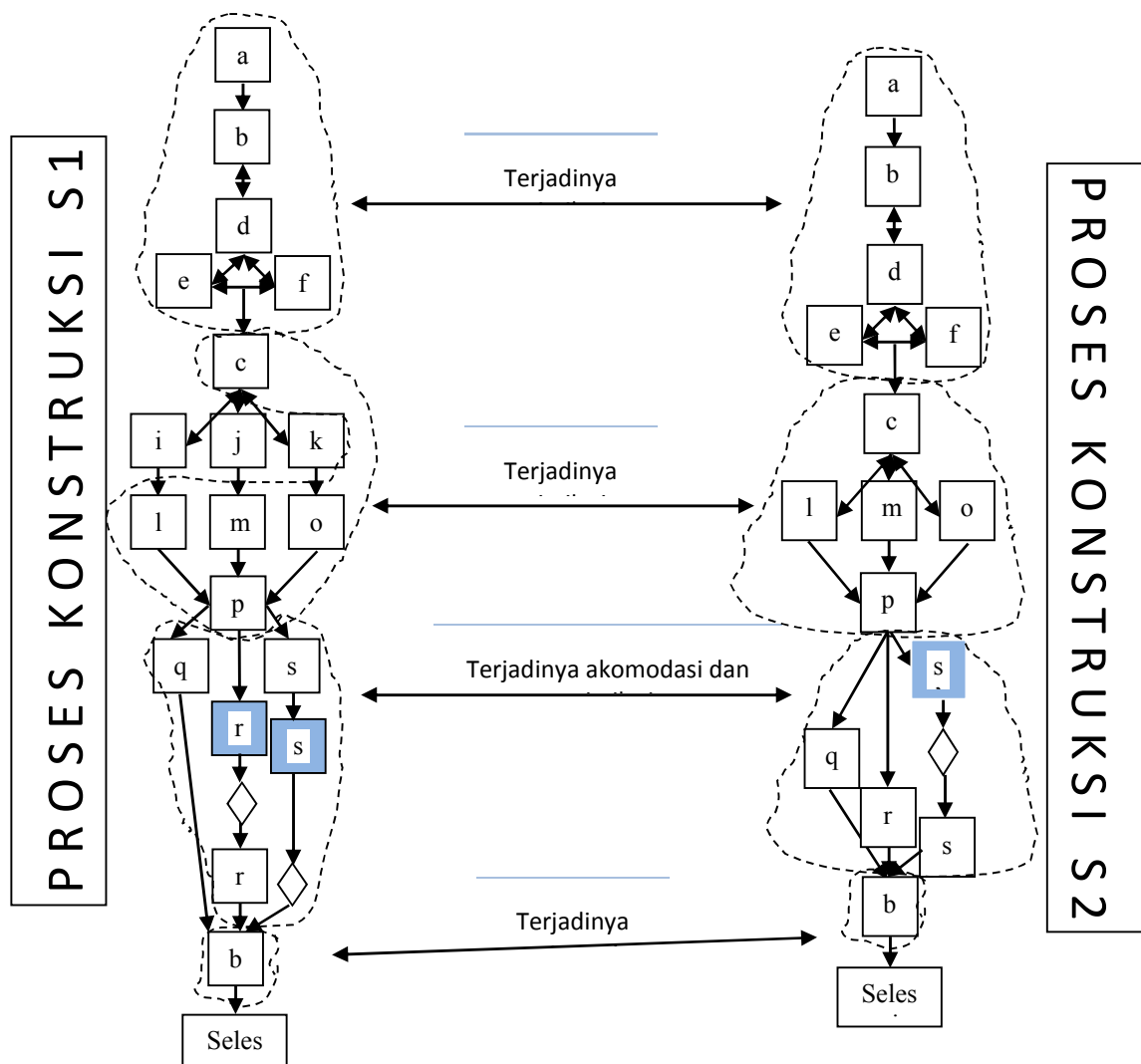


Diagram 5. Perbandingan proses Konstruksi Bukti antara S1 dan S2

Kesamaan Proses konstruksi antara S1 dan S2 muncul ketika mereka sama-sama mampu melakukan proses berpikir yang hampir lengkap sesuai dengan struktur masalah yang digambarkan pada Diagram 2.5.1, yakni ketika mereka langsung bisa menentukan strategi penyelesaian, melaksanakan penyelesaian, menggunakan algoritma pembagian, dan ketidaktelitian ketika melakukan proses aljabar, tetapi mampu merefleksi ulang terhadap proses aljabarnya dengan **cepat dan tepat**. Kesamaan proses konstruksi S1 dan S2 seperti digambarkan pada Diagram 6 berikut.

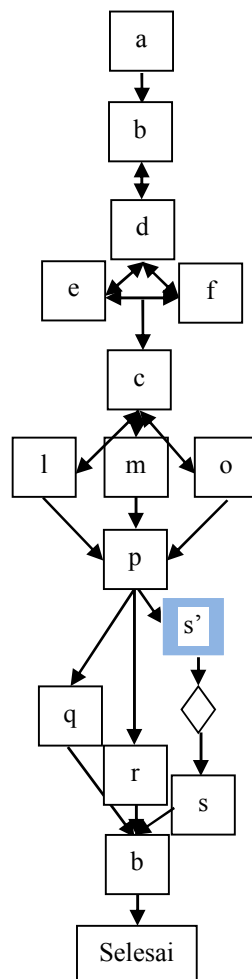


Diagram 6 Model Proses Konstruksi Kelompok Atas

7. Proses konstruksi mahasiswa terhadap bukti keterbagian berdasarkan kerangka konseptual asimilasi dan akomodasi

Dalam penelitian konstruktivisme, proses belajar merupakan suatu proses pembentukan pengetahuan yang harus dikonstruksi oleh pebelajar. Menurut Piaget bahwa pengetahuan yang dibentuk adalah pengetahuan yang dibangun dalam pikiran seseorang dengan kegiatan asimilasi dan akomodasi sesuai dengan skema yang dimilikinya. Hal ini ditegaskan pula oleh (Hudojo, 1998) bahwa Belajar merupakan proses membangun atau mengkonstruksi pemahaman sesuai dengan kemampuan yang dimiliki seseorang.

Selanjutnya dalam penelitian dikembangkan proses berpikir pebelajar (mahasiswa) dengan menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi Piaget, yang penjelasannya dikaitkan dengan empat langkah proses pemecahan masalah oleh Polya yang tergambar pada Tabel 2.6.1 tentang kerangka konseptual proses asimilasi dan akomodasi yaitu, (1) memahami masalah; (2) merencanakan pemecahan masalah; (3) melaksanakan pemecahan masalah; dan (4) mengevaluasi hasil pemecahan masalah.

Proses konstruksi mahasiswa dalam hal ini subjek, baik subjek kelompok atas, subjek kelompok sedang, maupun subjek kelompok bawah terhadap bukti keterbagian mempunyai karakteristik berbeda-beda, namun mengalami disequilibrasi yang hampir sama yaitu ketika subjek melakukan proses aljabar, sehingga dalam proses berpikirnya terjadi proses asimilasi dan akomodasi.

Proses konstruksi bukti subjek kelompok atas terutama S1 hampir sesuai dengan struktur masalah pada diagram 2.5.1. hanya saja S1 langsung menginterpretasikan syarat $0 \leq r < 3$ dengan mengganti nilai $r = 0$, $r = 1$, dan $r = 3$ ke dalam nilai $n = 3p + r$. Demikian halnya dengan S2 langsung mengganti nilai $n = 3p$, $n = 3p + 1$, dan $n = 3p + 2$. Karena itu subjek kelompok atas melakukan proses asimilasi, yang dilanjutkan dengan proses akomodasi ketika subjek kelompok atas mengalami disequilibrasi dan langsung melakukan refleksi ulang pada sebagian proses aljabar dengan melakukan proses akomodasi rencana penyelesaian dan melakukan penyelesaian, sampai akhirnya mampu menyimpulkan bukti keterbagian dengan sempurna (benar). Oleh karena itu proses berpikir subjek

kelompok atas **sedikit mengalami ketidaksempurnaan terhadap substruktur masalah.**

Perbedaan antara proses berpikir antara kelompok atas, sedang, dan kurang adalah ketika refleksi ulang pada proses aljabar. Ketika kelompok atas melakukan proses penyelesaian aljabar **waktu yang diperlukan tidak terlalu lama** ditandai dengan **panah tipis**, sedangkan pada kelompok sedang dan kelompok bawah dalam melakukan **penyelesaian aljabar mengalami pemikiran yang ekstra sehingga penyelesaiannya memerlukan waktu yang lambat**. Pada kelompok bawah juga **terjadi disequilibrasi pada awal proses berpikir** yakni ketika akan memilih strategi penyelesaian bukti.

D. KESIMPULAN DAN SARAN

1. Kesimpulan

Dari hasil kajian terhadap proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti keterbagian dan berdasarkan tujuan dari penelitian ini dapat disimpulkan sebagai berikut.

Proses berpikir mahasiswa IAIN Ambon dalam mengkonstruksi bukti keterbagian khususnya subjek kelompok atas memiliki dua karakteristik, yaitu: (1) hampir lengkap, dan (2) tidak lengkap. **Pertama**, proses berpikir mahasiswa yang dikategorikan hampir lengkap, yakni ketika mahasiswa mengkonstruksi bukti tetapi tidak sesuai dengan substruktur masalah dalam proses asimilasi, yakni ketika mahasiswa mengkonstruksi submasalah proses aljabar. Setelah refleksi ulang yang dilanjutkan dengan proses akomodasi, yakni menentukan dan melaksanakan rencana penyelesaian lain pada proses aljabar, mahasiswa mampu mengkonstruksi bukti sesuai dengan struktur masalah sehingga memperoleh jawaban benar (sempurna). **Kedua**, ketidaklengkapan terjadi karena ketidaksempurnaan proses asimilasi yang merupakan proses berpikir paling sederhana, yakni mahasiswa mengalami disequilibrasi ketika menentukan rencana penyelesaian (definisi keterbagian) dan mengkonstruksi submasalah proses aljabar, setelah refleksi ulang yang dilanjutkan dengan proses akomodasi, mahasiswa hanya mampu mengkonstruksi sebagian struktur berpikir yang sesuai dengan substruktur masalah dan memperoleh jawaban (kesimpulan) yang benar (S6).

2. Saran

Dari temuan hasil penelitian ini, dapat disarankan bahwa kajian penelitian ini masih terbatas, yaitu mengkonstruksi bukti keterbagian, karena itu masih sangat terbuka peluang penelitian lanjutan terutama berkaitan dengan: (1) bagaimana proses bernalar (*reasoning*) mahasiswa ketika mengkonstruksi bukti selain materi keterbagian; (2) desain pembelajaran yang berkaitan dengan proses pembuktian matematika.

E. DAFTAR PUSTAKA

- Eric. J. Knuth, 2002. *Secondary School Mathematics Teacher's Conceptions of Proof*, JRME, No. 5 Vol.33, University of Wisconsin-Madison
- Hodojo, H., 1990. *Strategi Belajar Mengajar Matematika*, Malang: IKIP Malang
- 1998. *Pembelajaran matematika menurut pandangan konstruktivistik*. Makalah Disajikan dalam Seminar Nasional Upaya-Upaya Meningkatkan Peran Pendidikan Matematika dalam Menghadapi Era Globalisasi. Malang: Tidak Diterbitkan.
- Ipung Yuwono, 2004. *Lompatan dalam Bukti Teorema Limit Fungsi Trigonometri*, Jurnal MIPA Tahun 33, Malang Januari 2004, ISSN 0854-8269
- Lulu Healey & Celia Hoyles, 2000. *A Study of Proof Conceptions in Algebra*, Universitas London, UK. *JRME*, 3(4).
- Mahusetyo, G., 2008. *Teori Bilangan (Modul)*, Jurusan Pendidikan Malang PPs Universitas Negeri Malang.
- McCown, R.R., 1992. *Educational psychology and classroom practice: a partnership*, United States of America: Allyn and Bacon
- Moleong, L.J., 2000. *Metodologi Kualitatif*, Bandung: PT. Remaja Rosdakarya
- NCTM. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*
- Nurhadi, dkk, 2003. *Pembelajaran Kontekstual dan Pembelajarannya dalam KBK*, Malang: Universitas Negeri Malang
- Nur, M. 1998. *Pengembangan perangkat pembelajaran dalam rangka menunjang implementasi kurikulum 1994 di Indonesia*. Makalah Disampaikan pada Improving Teaching Proficiency of Indonesia Junior and Senior Secondary Science Teacher pada SEAMEO-RECSAM. Malaysia: Tidak Diterbitkan.

- Ruseffendi, E.T, 1991. *Pengantar Membantu Guru Mengembangkan Kompetensi dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*, Bandung: Tarsito
- Subanji, 2007. *Proses Berpikir Penalaran Kovariasional Pseudo dalam Mengkonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamika Berkebalikan*. Disertasi tidak dipublikasikan, Unesa Surabaya
- , 2009. *Pengembangan Pembelajaran Matematika Yang Berorientasi pada Problem Solving Melalui Meaning Based Approach*, makalah disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Malang: tidak diterbitkan
- Suparno, P. 1996. *Filsafat konstruktivisme dalam pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius.