ABSTRAK

PENENTUAN HARGA OPSI EROPA DENGAN MODEL BINOMIAL

Djaffar Lessy, Dosen Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, IAIN Ambon
081343357498, E-mail: Djefles79@yahoo.om

Banyak model telah ditemukan untuk menentukan harga opsi. Model binomial dianggap sebagai model yang paling sederhana. Model ini digunakan dengan asumsi bahwa pergerakan bahwa harga aset hanya memiliki dua kemungkinan kejadian, yaitu harga aset naik atau harga aset turun. Untuk menentukan harga opsi Eropa dengan model binomial terbagi atas dua model, yaitu: model binomial dan model binomial kombinatorik. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa harga opsi Eropa dengan model binomial konvergen ke harga opsi menurut rumus *Black-scholes.*

Kata kunci : opsi Eropa, model binomial.

PENDAHULUAN

Sekitar 30 tahun terakhir ini, derivatif telah berkembang pesat dalam dunia keuangan. Derivatif dapat didefinisikan sebagai instrumen keuangan yang nilainya bergantung pada (atau diturunkan dari) nilai aset yang mendasarinya (seperti saham, komoditas, dan mata uang). Saham merupakan suatu aset yang beresiko, oleh karena itu perlu adanya suatu instrumen keuangan yang berfungsi untuk melindungi aset tersebut yaitu opsi.[1]

Opsi adalah suatu kontrak antara *writer* dan *holder* yang memberikan hak, bukan kewajiban kepada *holder* untuk membeli atau menjual suatu aset pokok (*underlying asset*) dengan suatu harga tertentu (*strike price* atau *exercise price*) pada suatu waktu tertentu dimasa akan datang (*expiration date* atau *maturity time*). Opsi yang terdapat pada pasar keuangan ada bermacam-macam seperti opsi Amerika, opsi Eropa, ada juga opsi eksotik (*exotic option*) atau *path dependent option* seperti opsi barrier, opsi Asia, dan lain-lain. Hal menarik dalam masalah opsi adalah menentukan harga yang pantas dibayar oleh *holder* kepada *writer* saat *holder* membeli sebuah opsi dari *writer*.

[1] John C. Hull. *Options, Futures, And Other Derivatives*. (New Jersey : Pearson Derivatives, 2006), hlm. 1

Pada tahun 1970-an, Fischer Black, Myron Scholes, dan Robert Merton membuat model untuk menghitung harga opsi. Mereka mengamati pergerakan harga aset yang berdistribusi *lognormal* dan menurunkan suatu persamaan diferensial parsial yang menggambarkan harga opsi.[2]

Banyak model telah ditemukan untuk menentukan harga opsi. Model yang paling sederhana adalah model binomial. Model ini digunakan dengan asumsi bahwa pergerakan harga aset hanya memiliki dua kemungkinan kejadian, yaitu harga aset naik atau harga aset turun. Pada tulisan ini, penulis akan mengkaji tentang penentuan harga opsi dengan model binomial, khususnya opsi Eropa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Opsi

Opsi merupakan suatu surat berharga yang dapat diperdagangkan, nilainya tergantung pada suatu nilai dari aset pokok (*underlying asset*). Pada sebarang opsi, terdapat dua pihak yang terlibat, yaitu *holder* (pihak yang memegang opsi) dan *writer* (pihak yang menerbitkan opsi).

Opsi dapat dikelompokkan menjadi dua kategori utama berdasarkan hak pemilik opsi, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah opsi untuk **membeli** sedangkan opsi *put* adalah opsi untuk **menjual.** Sebuah opsi *call* memberikan hak, bukan kewajiban, kepada pemiliknya (*holder*) untuk membeli sebuah aset dari *writer* dengan harga yang telah disepakati (*strike price* atau *exercise price*), dan hak tersebut berakhir pada waktu yang telah ditentukan (*expiration date* atau *maturity time*). Sedangkan opsi *put* memberikan hak, bukan kewajiban, kepada pemiliknya (*holder*) untuk menjual sebuah aset kepada *writer* dengan harga yang telah disepakati (*strike price* atau *exercise price*), dan hak tersebut berakhir pada waktu yang telah ditentukan (*expiration date* atau *maturity time*).[3]

Berdasarkan waktu pelaksanaan hak, terdapat dua jenis opsi standar, yaitu opsi Eropa dan Opsi Amerika. Opsi Eropa hanya dapat di-*exercise* pada saat jatuh

[2]Ibid. hlm. 281
[3] Ibid. hlm. 6

tempo (*maturity time*) dari opsi. Sedangkan opsi Amerika dapat di-*exercise* setiap saat sebelum atau pada saat jatuh tempo (*maturity time*) dari opsi.[4]

Opsi *call* Eropa memberi kesempatan kepada pemiliknya untuk membeli sebuah aset dari *writer* dengan harga *strike price* K pada saat *maturity time*. Misalkan $S(t)$ menyatakan harga aset pada saat t, dan T menyatakan *maturity time*. Jika $S(T) > K$ maka opsi akan di-*exercise* dengan keuntungan sebesar $S(T) - K$, dan jika $S(T) \leq K$ maka opsi tidak akan di-*exercise*. Sehingga nilai *payoff* dari opsi *call* Eropa pada saat *maturity time* adalah $\max\{S(T) - K, 0\}$. Untuk opsi *put* Eropa memberi kesempatan kepada pemiliknya untuk menjual sebuah aset kepada *writer* dengan harga *strike price* K pada saat *maturity time*. Misalkan $S(t)$ menyatakan harga aset pada saat t, dan T menyatakan *maturity time*. Jika $S(T) < K$ maka opsi akan di-*exercise* dengan keuntungan sebesar $K - S(T)$, dan jika $S(T) \geq K$ maka opsi tidak akan di-*exercise*. Sehingga nilai *payoff* dari opsi *call* Eropa pada saat *maturity time* adalah $\max\{K - S(T), 0\}$.[5]

2. Model Binomial untuk Menentukan Harga Opsi Eropa

Model ini berangkat dari suatu model pergerakan harga aset yang sederhana. Selang waktu $[0, T]$ dibagi menjadi n sub selang yang sama panjang dengan titik-titik bagi $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ dengan $t_i = i\Delta t \ (i = 0,1, .. n)$, $\Delta t = \frac{T}{n}$, T adalah *maturity time* , dan $S_i = S(t_i)$ harga aset pada saat t_i. Harga aset dapat bergerak naik dengan faktor sebesar u dan dapat bergerak turun dengan faktor sebesar d.

Asumsi :

1. Dalam selang waktu Δt harga aset dapat naik atau turun menjadi $S \longrightarrow Su$ atau $S \longrightarrow Sd$ dengan $0 < d < 1 < u$.
2. Peluang harga aset naik P(naik) = p dan peluang harga aset turun P(turun) = $1 - p$.

---

[4] Ibid.

[5] Desmond J. Higham. *An Introduction to Financial Option Valuation.* (New York : Cambridge University Press, 2004), hlm. 1-4.

3. Ekspektasi *return* harga aset besarnya sama dengan *risk-free interest rate* r. Sehingga untuk harga saham S yang bergerak secara acak dari S_i pada saat t_i menjadi S_{i+1} pada saat t_{i+1} ini berarti $E(S_{i+1}) = S_i e^{r\Delta t}$.[6]

Nilai parameter u, d dan p akan ditentukan kemudian dengan menggunakan beberapa persamaan yang menghubungkan ketiga persamaan tersebut atau menggunakan suatu asumsi tambahan.

Dari asumsi 1 dan 2 (model diskrit) diperoleh

$$E(S_{i+1}) = pS_i u + (1-p)S_i d$$

Sehingga diperoleh persamaan pertama

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{1}$$

yang memberikan $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$. Agar dipenuhi $0 \leq p \leq 1$ maka haruslah $d \leq e^{r\Delta t} \leq u$. Untuk model kontinu terdapat hubungan

$$E\left({S_{i+1}}^2\right) = {S_i}^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

dengan $Var\,(S_{i+1}) = E\left({S_{i+1}}^2\right) - \left(E(S_{i+1})\right)^2 = {S_i}^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)$.

Untuk model diskrit kita mempunyai

$$\begin{aligned} Var(S_{i+1}) &= E\left({S_{i+1}}^2\right) - \left(E(S_{i+1})\right)^2 \\ &= p(S_i u)^2 + (1-p)(S_i d)^2 - {S_i}^2(pu + (1-p)d)^2 \end{aligned}$$

Dengan menyamakan variansi untuk model diskrit dan model kontinu, diperoleh persamaan kedua

$$e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) = pu^2 + (1-p)d^2 - (e^{r\Delta t})^2$$

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2 \tag{2}$$

Persamaan (1) dan (2) diatas memberikan dua hubungan u, d dan p. Dibutuhkan persamaan ketiga untuk dapat menentukan nilai ketiga parameter tersebut. Persamaan ketiga dapat dipilih. Diantara berbagai pilihan yang mungkin dua diantaranya :

$$u\,d = 1, \text{dan} \quad p = \frac{1}{2} \tag{3}$$

[6] Rudiger Seydel. *Tools for Computational Finance.* (Berlin : Springler, 2002), hlm. 12-13.

Dari tiga persamaan yang diperoleh, yaitu persamaan (1), (2), dan (3) di atas, nilai-nilai u, d dan p dapat ditentukan.

Solusi untuk pilihan $u\ d = 1$ diberikan oleh :

$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$, $d = \frac{1}{u} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$ dan $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ dengan $\beta = \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)$

Sedangkan solusi untuk pilihan $p = \frac{1}{2}$ diberikan oleh :

$p = \frac{1}{2}$, $u = e^{r\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right)$ dan $d = e^{r\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right)$

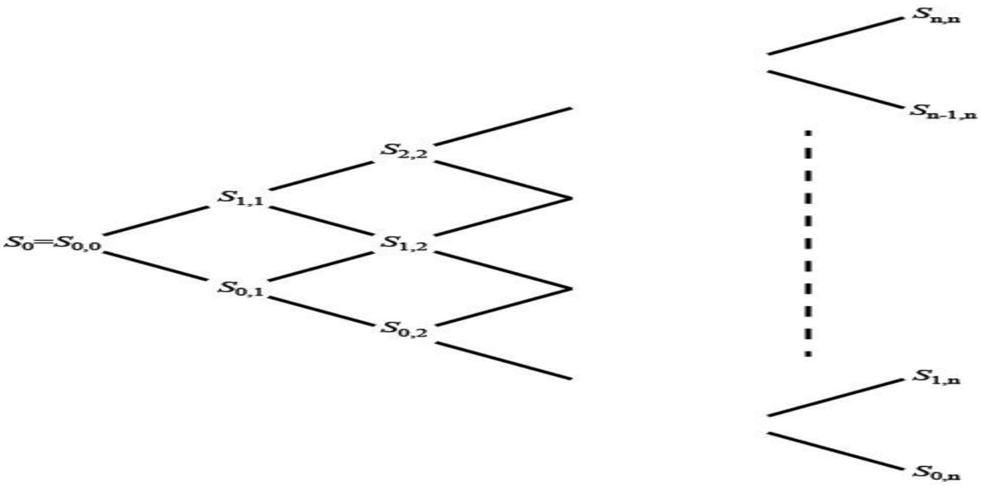
Selanjutnya akan ditentukan harga aset dengan menggunakan parameter yang telah diketahui. Misalkan $t_0 = 0$ harga aset adalah S_0, maka menurut model binomial ini, harga aset pada saat $t_1 = 1.\Delta t$ diberikan oleh $S_0 u$ dan $S_0 d$. Selanjutnya pada saat t_2 harga aset mengambil salah satu dari $S_0 d^2$, $S_0 ud$ atau $S_0 u^2$. Dengan meneruskan langkah ini maka pada saat $t_i = i\Delta t$ akan terdapat $i + 1$ harga aset akan mungkin terjadi, yang diberikan oleh

$$S_{j,i} = S_0 u^j d^{i-j} \qquad j = 0,1, \dots, i$$

dengan $S_{j,i}$ menyatakan harga aset pada saat t_i dan telah terjadi kenaikan harga aset sebanyak j kali serta penurunan harga aset sebanyak $i - j$ kali, dihitung dari saat $t_0 = 0$. Pada saat *maturity time* $t_n = n.\Delta t = T$, terdapat $n + 1$ harga aset yang mungkin yaitu $\{S_{j,n}\}_{j=0,1,\dots,n}$. Jika $\{C_{j,n}\}_{j=0,1,\dots,n}$ menyatakan nilai-nilai *payoff* pada saat *maturity time* untuk sebuah opsi *call* Eropa dan $\{P_{j,n}\}_{j=0,1,\dots,n}$ menyatakan nilai-nilai *payoff* pada saat *maturity time* untuk sebuah opsi *put* Eropa, maka

$$C_{j,n} = \max\{S_{j,n} - K, 0\} \qquad j = 0,1, \dots, n$$

$$Pu_{j,n} = \max\{K - S_{j,n}, 0\} \qquad j = 0,1, \dots, n$$



Gambar. 1 Pohon binomial harga aset

Model binomial selanjutnya bekerja secara mundur (dalam waktu) untuk memperoleh nilai opsi pada saat $t_0 = 0$. Nilai opsi saat t_i, yaitu $V_{j,i}$, berkaitan dengan nilai aset pada saat itu yaitu $S_{j,i}$, dihitung secara rata-rata dari nilai-nilai opsi $V_{j,i+1}$ dan pada $V_{j+1,i+1}$ pada saat t_{i+1}. ($V_{j,i} = C_{j,i}$ untuk *call* dan $V_{j,i} = Pu_{j,i}$ untuk *put*).

Nilai $V_{j,i}$ diberikan oleh

$$V_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \quad j = 0,1,\dots,i \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,0$$

Formula diatas memungkinkan kita untuk melakukan langkah mundur ke saat $t_0 = 0$ dan mendapatkan nilai opsi (*call* atau *put*) Eropa yang diinginkan pada saat $t_0 = 0$. Sehingga kita peroleh :

Untuk opsi *call* Eropa

$$C_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pC_{j+1,i+1} + (1-p)C_{j,i+1}) \quad j = 0, 1, \dots, i \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,0$$

(4)

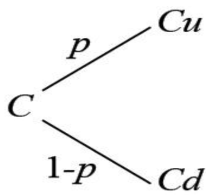
Untuk opsi *put* Eropa

$$Pu_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pPu_{j+1,i+1} + (1-p)Pu_{j,i+1}) \quad j = 0,1,\dots,i \quad i = n-1, n-2,\dots,1,0$$

(5)

Dari persamaan (4) dan (5) dapat diturunkan formula lain (kombinatorik) untuk opsi *call* dan *put* Eropa.[7]

Model 1 langkah

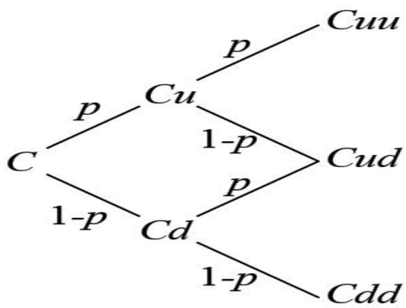


Gambar 2. Pohon binomial 1 langkah untuk opsi *call*

$$C = e^{-r\Delta t}(pC_u + (1-p)C_d)$$

Dimana C_u adalah harga opsi *call* pada harga aset naik, sedangkan C_d adalah harga opsi *call* pada harga aset turun.

Model 2 langkah



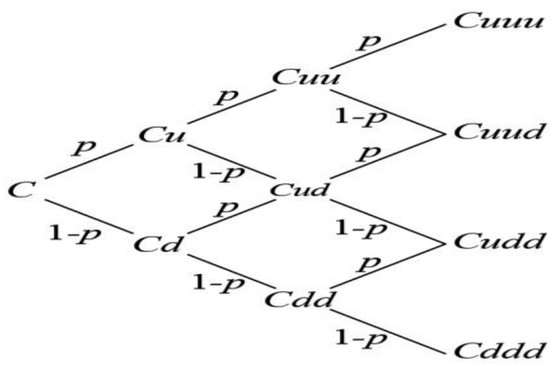
Gambar 3. Pohon binomial 2 langkah untuk opsi *call*

$$C = e^{-r\Delta t}\left(p\left(e^{-r\Delta t}(pC_{uu} + (1-p)C_{ud})\right) + (1-p)\left(e^{-r\Delta t}(pC_{ud} + (1-p)C_{dd})\right)\right)$$
$$= e^{-2r\Delta t}(p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd})$$

[7] http://users.aims.ac.za/ronnie/NMI&2Notes/Chap8.pdf. *Pricing in The Binomial Model.*

$$= e^{-2r\Delta t} \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} p^j (1-p)^{2-j} \max\{Su^j d^{2-j} - K, 0\}$$

Model 3 langkah



Gambar 4. Pohon binomial 3 langkah untuk opsi *call*

$$C = e^{-3r\Delta t}(p^3 C_{uuu} + 3p^2(1-p)C_{uud} + 3p(1-p)^2 C_{udd} + (1-p)^3 C_{ddd})$$

$$= e^{-3r\Delta t} \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} p^j (1-p)^{3-j} \max\{Su^j d^{3-j} - K, 0\}$$

Dari model 1 langkah, model 2 langkah, model 3 langkah, dan seterusnya, dapat dirumuskan formula model n langkah, untuk opsi *call* Eropa adalah

$$C = e^{-nr\Delta t} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max\{Su^j d^{n-j} - K, 0\}$$

atau

$$C = e^{-nr\Delta t} \sum_{j=0}^{n} P_j \max\{S_j - K, 0\}$$

Dengan cara yang sama dapat diturunkan juga formula untuk opsi *put* Eropa, sehingga diperoleh

$$Pu = e^{-nr\Delta t} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max\{K - Su^j d^{n-j}, 0\}$$

atau

$$Pu = e^{-nr\Delta t} \sum_{j=0}^{n} P_j \max\{K - S_j, 0\}$$

4. Simulasi Penentuan Harga Opsi Eropa dengan Model Binomial

Untuk menentukan harga opsi dilakukan simulasi dengan bantuan program MATLAB. Penentuan harga opsi Eropa dengan model binomial ditentukan dengan dua model, yaitu : model binomial dan model binomial kombinatorik.

Untuk mengsimulasikam kedua model ini, terlebih dahulu diinput beberapa parameter, antara lain : harga aset awal (S_0); *strike price* (K); *interest rate* (r); waktu jatuh tempo / *maturity time* (T); *volatility* σ; dan banyaknya langkah (n).

Contoh simulasi :

Nilai parameter yang iinput adalah :

$S_0 = 150;\ K = 145;\ r = 0.07;\ T = 0{,}25;\ \sigma = 0.5;\ n = 10.$

Hasil yang diperoleh untuk simulasi ini adalah :

Harga opsi Eropa dengan model binomial : untuk opsi *call* $= 18.6178$ dan untuk opsi *put* $= 11.1024$.

Harga opsi Eropa dengan model binomial kombinatorik : untuk opsi *call* $= 18.6178$ dan untuk opsi *put* $= 11.1024$.

Sedangkan harga opsi *call* dan opsi *put* menurut rumus *Black-scholes* yang dijadikan sebagai nilai patokan (nilai eksak) adalah : untuk opsi *call* $= 18.6101$ dan untuk opsi *put* $= 11.0947$.

Model	Opsi *call*	Opsi *put*
Metode Binomial	**18.6178**	**11.1024**
Metode Binomial Kombinatorika	**18.6178**	**11.1024**
Rumus Black-Scholes	**18.6101**	**11.0947**

Terlihat bahwa harga opsi Eropa dengan model binomial konvergen ke harga opsi menurut rumus *Black-scholes.*

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Harga opsi Eropa dapat ditentukan dengan menggunakan model binomial.
2. Penentuan harga opsi Eropa dengan model binomial terbagi atas dua model, yaitu : model binomial dan model binomial kombinatorik.
3. Harga opsi Eropa dengan model binomial konvergen ke harga opsi menurut rumus *Black-scholes.*

DAFTAR PUSTAKA

Higham, J. Desmond (2004). *An Introduction to Financial Valuation Mathematics, Stochastics and Computation*. Cambrige University Press, New York.

Hull, John C. (2006). *Options, Futures, and Other Derivatives.* Pearson Derivatives, New Jersey.

Seydel, Rudiger. (2002). *Tools for Computational Finance.* Springler, Berlin.

http://users.aims.ac.za/ronnie/NMI&2Notes/Chap8.pdf. Pricing in The Binomial Model. (diakses Januari 2012).