PENERAPAN FUNGSI GAMMA DALAM PEMBUKTIAN 0! = 1

Amran Hapsan Dosen STKIP Pembangunan Indonesia Makassar
0852 5537 6956, E-mail: amranhapsan@yahoo.co.id

ABSTRAK

Pembuktian 0 ! = 1 dapat dilakukan dari definisi faktorial itu sendiri yaitu $n! = (n)(n-1)!$, jika masing-masing ruas kiri dan kanan persamaan tersebut dibagi dengan n maka kita peroleh $\frac{n!}{n} = \frac{(n)(n-1)!}{n} \rightarrow \frac{n!}{n} = \frac{(n-1)!}{n}$. Dari persamaan ini kita bisa dapatkan 0! = 1 jika nilai n diganti dengan 1. Dalam jurnal ini akan dibahas bagaimana membuktikan 0! = 1 melalui penerapan fungsi gamma yang melibatkan sifat-sifat operasi pada integral tak wajar.

Kata Kunci : *Integral tertentu, integral tak wajar, fungsi gamma.*

A. PENDAHULUAN

Dalam matematika, fungsi gamma telah dikembangkan untuk menentukan sifat faktorial suatu bilangan asli n yaitu n! = 1 x 2 x 3 x ... x n. Melalui teorema fungsi gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$ ini dapat digunakan untuk membuktikan 0! = 1.

B. PEMBAHASAN

INTEGRAL TAK TERTENTU

Permasalahan kita adalah mencari fungsi F yang turunannya adalah suatu fungsi f yang diketahui. Jika fungsi F yang demikian ada, maka fungsi tersebut disebut anti turunan dari fungsi f .

Definisi : Fungsi F disebut antiturunan (integral tak tertentu) dari f pada suatu interval I jika $\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$ untuk semua x di dalam I , yang dinotasikan dengan $\int f(x)\,dx = F(x)$.

Contoh: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ adalah antiturunan dari $f(x) = x^2$, karena

$$F'(x) = x^2 = f(x).$$

Tetapi perhatikan bahwa fungsi $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + 20$ juga memenuhi $H'(x) = x^2$. Ternyata, sebarang fungsi berbentuk $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, dengan C konstanta merupakan antiturunan dari f . Dengan demikian diperoleh $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$

Teorema : Jika F antiturunan (integral tak tertentu) dari f pada interval I, maka antiturunan yang paling umum adalah $F(x)+C$, dengan C konstanta sebarang, dan dinotasikan dengan $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

TEKNIK PENGINTEGRALAN

Rumus-rumus dasar integral tak tertentu yang diberikan di atas hanya dapat digunakan untuk mengevaluasi integral dari fungsi sederhana dan tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan integral seperti $\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ atau $\int xe^x\,dx$. Pada bab ini akan dibahas teknik-teknik pengintegralan untuk fungsi-fungsi yang tidak sederhana.

Integrasi substitusi

Untuk menyelesaikan integral ini, kita dapat melakukan substitusi berdasarkan aturan berikut.

Aturan substitusi : Jika $u = g(x)$ adalah fungsi terdiferensial dengan daerah hasil berupa selang I dan f kontinu pada I, maka $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$.

Dengan aturan di atas, maka kita dapat menyelesaikan $\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ dengan mengambil $u = 1+x^3$, sehingga diferensial u adalah $du = 3x^2\,dx$. Dengan demikian kita punyai

$$
\begin{aligned}
&\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx \\
&= \int \sqrt{1+x^3}\;3x^2 dx \\
&= \int \sqrt{u}\;du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

Integrasi Parsial

Sering kali kita menjumpai integran dalam bentuk perkalian fungsi-fungsi. Salah satu teknik untuk mengevalusai integral tersebut adalah dengan menggunakan teknik integrasi bagian demi bagian atau sering juga digunakan istilah integral parsial.

Jika f dan g dua buah fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

atau

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] - g(x)f'(x).$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan masing-masing ruas dari persamaan ini, kita peroleh

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx - \int g(x)f'(x)dx$$

atau

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Persamaan integral ini kita sebut **rumus integrasi parsial**, yang selanjutnya dengan mengambil $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ rumus tersebut dapat dituliskan dengan

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du\ .$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut

Contoh 1: Selesaikan $\int x \sin x\, dx$.

Penyelesaian: Pilih $u = x$ dan $dv = \sin x\, dx$, sehingga diperoleh

$du = dx$ dan $v = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1.$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
&\int x \sin x \, dx \\
&= x(-\cos x + C_1) - \int (-\cos x + C_1)dx \\
&= -x\cos x + C_1 x + \sin x - C_1 x + C \\
&= -x\cos x + \sin x + C.
\end{aligned}$$

Pada ilustrasi di atas kita menambahkan konstanta C_1 ketika mendapatkan v dari dv. Tetapi pada akhirnya konstanta C_1 tersebut akan tereliminasi. Dengan demikian untuk selanjutnya tidak perlu menuliskan konstanta C_1 ketika mendapatkan v dari dv. Yang terkadang membingungkan adalah bagaimana menentukan bagian mana yang harus diturunkan atau mana yang diintegralkan. Untuk menentukan bentuk *dv* yang akan diintegralkan, digunakan aturan urutan prioritas **detail,** yaitu

d*v*
eksponensial
trigonometri
aljabar
invers trigonometri
logaritma

Pemilihan bagian yang akan diintegralkan diprioritaskan berdasarkan urutan dari atas ke bawah, sedangkan bagian yang diturunkan dari bawah ke atas. Sebagai contoh, misalkan akan dicari $\int x^2 e^x dx$. Pada integran terdapat fungsi polinomial (aljabar) , x^2 dan fungsi eksponensial, e^x. Maka dipilih bagian untuk diintegralkan adalah fungsi eksponensial, yaitu $dv = e^x dx$, dan untuk diturunkan tentu saja fungsi aljabar polinomial $u = x^2$. Selanjutnya dapat digunakan langkah seperti dalam metode tabulasi.

INTEGRAL TERTENTU

Sifat-sifat integral tertentu :

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
3. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, dengan c konstanta sembarang
4. $\int_a^b [f(x)\,dx + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)]\,dx$.
5. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, dengan c konstanta sembarang.
6. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Contoh 2 : Tentukan $\int_1^2 (2x+1)\,dx = \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 1\,dx = 3+1 = 4.$

INTEGRAL TAK WAJAR

Jika f terintegral pada $[a,b]$ maka $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut improper integral jika :

(i). Batas pengintegralannya tak hingga, atau

(ii). f mempunyai ketakkontinuan tak terhingga di $[a,b]$

Contoh: Hitung $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

Penyelesaian

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big]_1^t\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$$

FUNGSI GAMMA

Fungsi Gamma yang dinyatakan oleh $\Gamma(n)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du.$$

Fungsi gamma ini yang dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari bilangan n, memenuhi beberapa hubungan yang mengagumkan, antara lain:

- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Hubungan tersebut kita buktikan sebagai berikut:

$$\Gamma(n+1)$$

$$= \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_0^p u^n e^{-u}\,du$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[u^n\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^p - \int_0^p \left(-e^{-u}\right)\left(nu^{n-1}\right)du \right]$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[-p^n e^{-p} + n\int_0^p u^{n-1}e^{-u}du \right]$$

$$= \lim_{p\to\infty} n\int_0^p u^{n-1}e^{-u}du$$

$$= n\Gamma(n)$$

Terbukti bahwa $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

- $\Gamma(n) = (n-1)!$

Hubungan tersebut kita buktikan sebagai berikut:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_0^p u^{n-1}e^{-u}du$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[\left(-e^{-u}u^{n-1}\right)\Big|_0^p + (n-1)\int_0^p u^{n-2}e^{-u}du \right]$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du = (n-1)\Gamma(n-1)$$

Dengan rumus berulang ini, jika μ bilangan bulat dan $0 < \mu < n$, maka

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...(n-\mu)\int_0^\infty u^{n-\mu-1}e^{-u}du$$

Khususnya, jika n sebuah bilangan bulat positif, kita miliki

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...3.2.1\int_0^\infty e^{-u}du$$

Dan karena $\int_0^\infty e^{-u}du = 1$, akhirnya diperoleh $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...3.2.1 = (n-1)!$

Karena alasan ini maka $\Gamma(n)$ kadang-kadang disebut fungsi faktorial.

- $\Gamma(n+1) = n!$

Hubungan tersebut kita buktikan sebagai berikut.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty u^{1-1} e^{-u}\, du$$
$$= \int_0^\infty e^{-u}\, du$$
$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-u}\, du$$
$$= \lim_{p\to\infty} \left(1 - e^{-p}\right)$$
$$= 1$$

Misalkan n = 1, 2, 3, ...dalam $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Maka $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$,

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$.Terbukti bahwa $\Gamma(n+1) = n!$.

$\Gamma(1) = 1 = 0!$ (Terbukti)

C. DAFTAR PUSTAKA

Stewart, James. 1998. *"Kalkulus",* Jilid 1 edisi 4, Erlangga.

Leithold. 2000. *'Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*, Jilid 2 , Erlangga, 2000

Purcell J.E & Dale Varberg.1984. *"Kalkulus dan Geometri Analitik,* Jilid 1, Erlangga.